هندسه نااقلیدسی

هیچ شاخه‌ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به‌کار نرود.
نیکلای لباچفسکی

سیداحسان حسینی *
دانش‌آموز سال چهارم
رشتهٔ ریاضی
شهرستان دره‌شهر، ایلام

مقدمه

در اوایل قرن نوزدهم، نگرش به هندسهٔ اقلیدسی، که قدمتی ۲۱۰۰ ساله داشت و یگانه هندسهٔ موجود بود، تغییر کرد و علم هندسه دگرگون شد و در واقع علم هندسهٔ جدیدی متولد شد. مفاهیم خط، دایره و... تغییر کردند و مفاهیم جدیدی به‌وجود آمدند؛ مفاهیمی که ابتدا شگفت‌انگیز بودند، ولی توانستند نگرش همه را نسبت به محیط اطراف تغییر دهند. در هندسهٔ جدید، مفاهیم و تعاریف ریاضی، مانند مثلثی که مجموع زوایای داخلی آن کمتر و یا بیشتر از ۱۸۰ درجه است، دو خط متمایز که یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، ... و همچنین مفاهیم فیزیکی مانند انحنای فضا، انحنای انتشار نور و... به‌راحتی قابل تحلیل بودند. به این ترتیب هندسه وارد دورهٔ جدیدی از مفاهیم و کاربردهای منطقی شد.

هندسهٔ نااقلیدسی که *لباچفسکی* و ریمان از پرچم‌دارانش بودند، در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد پیدا کرد. یکی از اساسی‌ترین کاربردهای این هندسه، تشریح نظریهٔ نسبیت انیشتین بود که فیزیک را متحول کرد و پیوند میان ریاضی و فیزیک بار دیگر پررنگ‌تر شد.

کلیدواژه‌ها: هندسهٔ نااقلیدسی، هندسه ریمانی، هندسهٔ لباچفسکی، نظریهٔ نسبیت انیشتین

هندسه اقلیدسی (سهموی)

هندسه در آغاز بر دانسته‌های تجربی استوار بود و مردم تمدن‌های اولیه، در زندگی روزمره از هندسه استفاده می‌کردند. برای مثال، مساحت زمین‌های کشاورزی و یا محدودهٔ زندگی خود را تعیین می‌کردند، از علائم خط، نقطه، دایره و... برای نشانه‌گذاری بهره می‌گرفتند و در نقشه‌ها و سندها از مفاهیمی مانند مساحت و فاصله استفاده می‌کردند. برخی از این مفاهیم نیز پیچیده بودند. مثلاً مصریان و بابلیان «قضیهٔ **فیثاغورث**» را در ۱۵۰۰ سال قبل از فیثاغورث، در عمل، می‌شناختند و به‌کار می‌بردند.

نخستین‌بار دانشمندی به نام **اقلیدس** که در اسکندریه زندگی می‌کرد، هندسه را به‌صورت یک علم درآورد. وی حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد **مسیح**، تمام اصول و قضایای هندسی را که تا آن زمان شناخته بود گردآورد و آن‌ها را به‌طور منظم، در یک مجموعهٔ ۱۳ جلدی قرار داد.

در زمان اقلیدس، هندسه در تب و تاب بود و نظریات مختلفی در زمینهٔ این علم مطرح می‌شد. کتاب اقلیدس که «اصول» نام داشت، روش‌های بنیادی و منسجمی را ارائه داد که تا امروز هم از منسجم‌ترین بنیادهای نظری بشر محسوب می‌شود. روش اقلیدس ساده بود. او چند

اصل (اصــل موضوعه) را بدون اثبات به‌عنوان اصل‌های بدیهی پذیرفت و سپس براساس آن‌ها صدها قضیهٔ دیگر را اثبات کرد که بسیاری از آن‌ها دور از ذهن بودند.

اصول موضوعی اقلیدس عبارت‌اند از:

۱. از هر دو نقطه یک خط راست می‌گذرد.

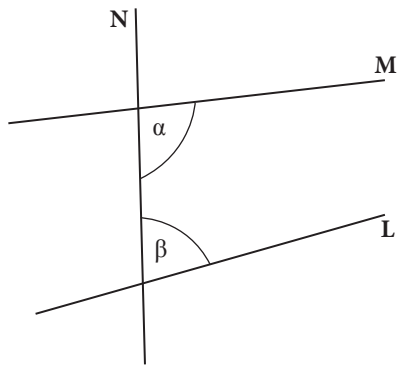
۲. هر پاره‌خط می‌تواند تا بی‌نهایت روی خط راست امتداد یابد.

۳. با یک نقطه به‌عنوان مرکز و یک پاره‌خط به‌عنوان شعاع می‌توان یک دایره رسم کرد.

۴. همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵. اگر خط راست N دو خط راست L و M را قطع کند، و مجموع زوایــای داخلی در یک طرف N کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، خط‌های L و M در آن طرف N یکدیگر را قطع می‌کنند.

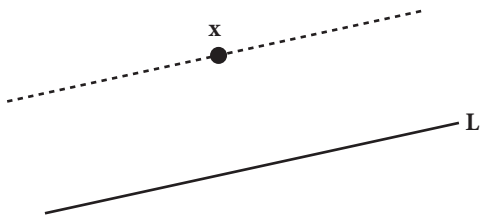
اگــر مجمــوع α و β کمتر از ۱۸۰ درجه باشــد، آن‌گاه خطوط M و L یکدیگر را در سمت α و β قطع می‌کنند.



شکل ۱

قضیه‌های زیر نیز بیانگر اصل پنجم اقلیدس‌اند:

۱. از یــک نقطه خارج از یک خط، یک و تنها یک خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد.



شکل ۲

ریمان

لباچفسکی

ساکری

خیام

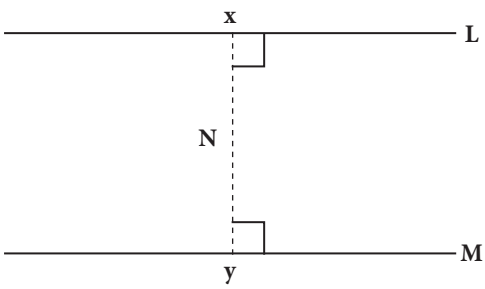
اقلیدس

اصل پنجم اقلیدس چندان بدیهی به‌نظر نمی‌رسید. گروهی از ریاضی‌دانان معتقد بودند که اصل پنجم را می‌توان به‌عنوان یک قضیه اثبات کرد. در این راه ریاضی‌دانان زیادی تلاش کردند، اما نتیجه نگرفتند.

از نقطهٔ x یک و تنها یک خط موازی با خط L می‌توان رسم کرد.

۲. اگر بین دو خط مفروض بتوان خطی رسم کرد که بر هر دو خط عمود باشد، آن دو خط با هم موازی‌اند.

دو خط L و M در نقاط x و y بر خط N عمودند، پس دو خط L و M با هم موازی‌اند.



شکل ۳

۳. اگر دو خط با هم موازی باشند و یکی از آن‌ها با خط سومی موازی باشد، خط دیگر نیز با خط سوم موازی خواهد بود.

پیدایش تفکرات نوین هندسی

اصل پنجم اقلیدس چندان بدیهی به‌نظر نمی‌رسید. گروهی از ریاضی‌دانان معتقد بودند که اصل پنجم را می‌توان به‌عنوان یک قضیه اثبات کرد. در این راه ریاضی‌دانان زیادی تلاش کردند، اما نتیجه نگرفتند.

خیام، ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی، در یکی از آثار ریاضی خود به‌نام «*رسالهٔ فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس*»، اصل موضوعهٔ پنجم اقلیدس را دربارهٔ قضیه خطوط متوازی که شالودهٔ هندسهٔ اقلیدسی است مورد مطالعه قرار داد و اصل پنجم را نیز اثبات کرد. به این ترتیب، خیام راه را برای دانشمندان بعد از خود هموار ساخت، به‌طوری که **ساکری** (ریاضی‌دان ایتالیایی) اساس نظریهٔ خود را دربارهٔ خطوط موازی، مطالعات خیام دانسته است. با مطالعات خیام و نظریه‌های ساکری و **والیس** (ریاضی‌دان انگلیسی) که چند قرن بعد از خیام بیان شدند، راه برای پایه‌ریزی هندسه‌ای جدید؛ با رویکردی نااقلیدسی، هموار شد.

هندسهٔ نااقلیدسی

در نیمهٔ اول قرن نوزدهم دو رویداد ریاضی مهم و انقلابی به‌وقوع پیوست:

- کشف هندسه‌ای خودسازگار، غیر از هندسهٔ اقلیدسی؛
- کشف جبری متفاوت با جبر معمولی دستگاه اعداد حقیقی.

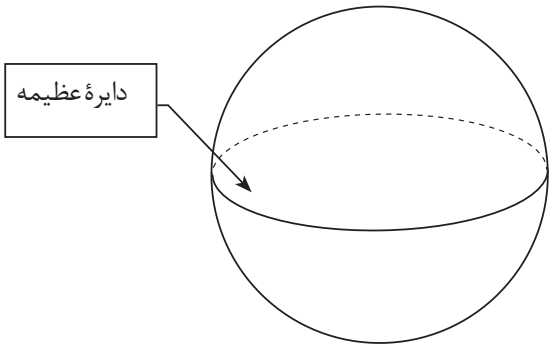
هندسهٔ نااقلیدسی که از مطالعهٔ عمیق‌تر موضوع توازی در هندسهٔ اقلیدسی شکل گرفت، به دو موضوع در مورد این اصل می‌پردازد: موضوع اول این است که از یک نقطهٔ خارج یک خط، هیچ خطی نمی‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد (هندسه بیضوی). موضوع دوم این است که از یک نقطه خارج یک خط بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد (هندسهٔ هذلولوی).

اما چگونه ممکن است دو خط که بر یک خط دیگر عمودند (بیان دوم اصل پنجم اقلیدس) با هم موازی نباشند؟ و یا اگر دو خط که با هم موازی هستند و خط سومی نیز با یکی از آن‌ها موازی باشد، ممکن است با دیگری موازی نباشد؟ برای پاسخ‌گویی به این سؤالات و درک بهتر هندسهٔ نااقلیدسی بهتر است که مفهوم خط را که با شنیدن آن یک خط راست به ذهنمان می‌رسد، اندکی تغییر دهیم. به‌عبارت دیگر، بهتر است به سطح یک کره فکر کنیم.

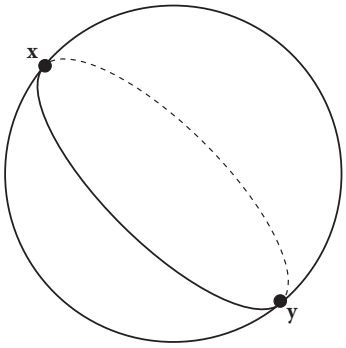
هندسهٔ بیضوی (ریمانی)

هندسهٔ ریمانی نوعی هندسهٔ نااقلیدسی است. در هندسهٔ بیضوی اصل توازی این‌گونه بیان می‌شود: «از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان خطی به موازات خط مفروض رسم کرد.» در واقع در هندسهٔ بیضوی، خطوط موازی وجود ندارند. با تجسم سطح یک کره می‌توان سطحی شبیه به سطح بیضوی در نظر گرفت.

اصل توازی روی سطح کره برقرار نیست، چرا که روی سطح کره اصلاً خط راستی وجود ندارد. در واقع روی سطح کره مفهوم خط از آنچه در ذهن ماست (خط راست) تغییر کرده و به منحنی تبدیل می‌شود. در واقع خط، روی سطح کره، قسمتی از یک «دایرهٔ عظیمه» است (دایرهٔ عظیمه دایره‌ای است که کره را دقیقاً دو نیم می‌کند).



xy خطی روی کره است.

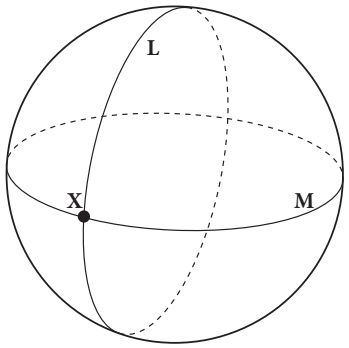


در هندسهٔ کروی اصل توازی برقرار نیست.

شکل ۴

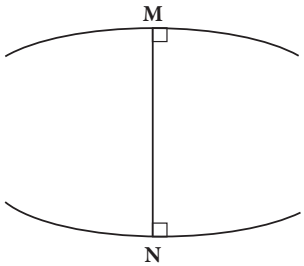
امروزه هندسهٔ هذلولوی را هندسهٔ لباچفسکی می‌نامند. لباچفسکی اولین کسی بود که مقاله‌ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت

دو دایره عظیمهٔ L و M (خط روی کره) در نقطهٔ x یکدیگر را قطع کرده‌اند. به‌عبارت دیگر، هیچ خطی نیست که از x بگذرد و L را قطع نکند.



شکل ۵

شکل ۶ اصل توازی در هندسهٔ بیضوی را نشان می‌دهد که اصل پنجم اقلیدس را نقض می‌کند. به‌عبارت دیگر، با اینکه این دو خط در دو نقطه بر یک خط عمودند، ولی هیچ‌گاه با هم موازی نیستند (امتداد آن‌ها یک دیگر را قطع می‌کند.)



شکل ۶

همهٔ چهار اصل اول اقلیدس روی کره درست نیستند. مثلاً روی کره دایره‌ای به شعاع دلخواه بزرگ وجود ندارد. اصل سوم نیز برقرار نیست. مثلاً از بالای کره (قطب شمال) تا پایین کره (قطب جنوب) بیش از یک کوتاه‌ترین مسیر وجود دارد.

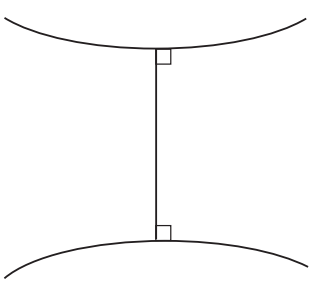
هندسهٔ هذلولوی (لباچفسکی)

لباچفسکی، ریاضی‌دان روس، هر چند دربارهٔ موضوعات مختلف پژوهش‌های فراوانی انجام داد، ولی فعالیت او در زمینهٔ هندسه و ابداع هندسهٔ نااقلیدسی در تاریخ ریاضیات ماندگار شد. امروزه هندسهٔ هذلولوی را هندسهٔ لباچفسکی می‌نامند.

لباچفسکی اولین کسی بود که مقاله‌ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت. **بویوئی** (دیگر ریاضی‌دان روس) نیز بدون اطلاع از کار لباچفسکی، دو سال بعد مقاله‌ای دربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت.

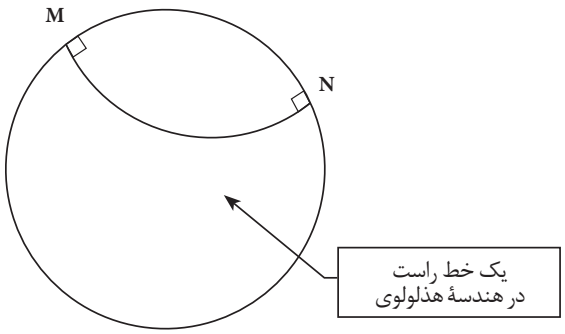
اصل توازی در هندسهٔ هذلولوی دقیقاً عکس هندسهٔ بیضوی تعریف می‌شود: «از یک نقطه خارج از یک خط، بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که با خط مفروض موازی باشد.»

همان‌طور که در شکل ۷ نیز معلوم است، همچنان که دو خط در دو نقطه بر یک خط عمودند، اما با هم موازی نیستند، یعنی چنین نیست که امتداد آن‌ها یکدیگر را قطع نکند). همچنین بی‌شمار خط نیز می‌توان به این شکل اضافه کرد.



شکل ۷

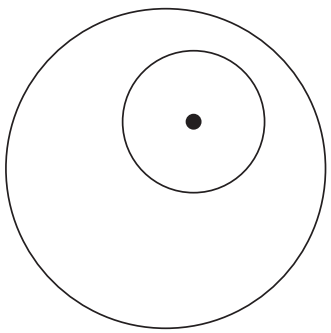
در هندسهٔ هذلولوی مانند هندسهٔ کروی، باید مفهوم خط را اندکی تغییر دهیم. خط راست و کوتاه‌ترین مسیر از دیدگاه هندسهٔ هذلولوی، کمانی از یک دایره است که بر دایرهٔ اصلی در مرز آن عمود است.



شکل ۸

خط MN (شکل ۸) شاید از دید ما که تا به حال خط را تنها یک خط راست در نظر می‌گرفتیم، عجیب باشد و واقعاً خط به‌نظر نرسد. اما در حقیقت این‌ها پاره‌خط‌های هذلولوی‌اند. «حقیقت یک مفهوم ریاضی بیشتر وابسته به چیزی است که انجام می‌دهد، نه آنچه که هست» (**تیموری گاورز**، ریاضی‌دان معاصر).

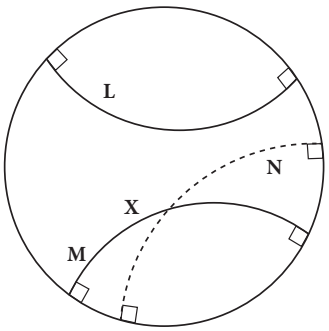
دایره‌های هذلولوی شبیه به دایره‌های معمولی‌اند، ولی مرکزشان کمی متفاوت است.



شکل ۹ دایرهٔ هذلولوی و مرکز آن

در هندسهٔ هذلولوی نیز اصل پنجم اقلیدس نادرست است.

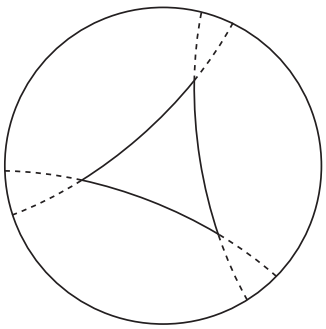
دو خط L و M با هم موازی‌اند، چون امتداد آن‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کند. از طرف دیگر، دو خط L و N نیز چون یکدیگر را قطع نمی‌کنند، با هم موازی‌اند. بنابر اصل پنجم اقلیدس، چون دو خط L و M با هم موازی‌اند، خط N باید با خط M موازی باشد. اما با توجه به شکل خطوط، N و M یکدیگر را در x قطع می‌کنند که در این صورت اصل پنجم اقلیدس نادرست می‌شود.



شکل ۱۰

یک مثلث جدید!

از دوران تحصیل ما در دبستان، یکی از به‌یادماندنی‌ترین ویژگی‌های مثلث، مجموع زوایای داخلی آن بود که همه می‌دانیم برابر با ۱۸۰ درجه است. اما اکنون که با هندسه‌های نااقلیدسی آشنا شدیم، تصور مثلثی که مجموع زوایای داخلی آن کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، زیاد مشکل نیست. برای رسم این مثلث به هندسهٔ هذلولوی مراجعه می‌کنیم.



شکل ۱۱ مثلث هذلولوی

کاربرد هندسه نااقلیدسی

هندسهٔ نااقلیدسی که بعدها **گاوس** و ریمان آن را در قالب هندسهٔ کلی‌تری بسط دادند، در نظریهٔ نسبیت انیشتین مورد استفاده قرار گرفته است.

در واقع اهمیت این دو هندسه زمانی آشکار شد که نظریهٔ نسبیت عام انیشتین به‌عنوان جایگزینی برای نظریات **نیوتن** از مکان، زمان و گرانش انتخاب شد. زیرا ساختار نظریهٔ نسبیت انیشتین مبتنی بر هندسهٔ ریمانی بود. در این نظریه، هندسهٔ مکان ـ زمان به‌جای آنکه صاف باشد، منحنی است.

منابع

۱. ایوز، هاورد و.، (۱۳۹۰). آشنایی با تاریخ ریاضیات (ج ۲). ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

۲. گاورز، تیموتی (۱۳۸۸). مقدمه‌ای کوتاه بر ریاضیات. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی. تهران.

۳. بیرشک، احمد و دیگران. خلاصهٔ زندگی‌نامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانش‌نامهٔ بزرگ فارسی.

۴. مارویـن جـی، گرینبـرگ. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ترجمهٔ م.ه. شفیعیها. ویرایش احمد بیرشک. حمید کاظمی و همایون معین. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

*Ehsan.Hossyni@chmail.ir